Ejercicios de Análisis Matemático – Desigualdades

Desigualdades entre polinomios. Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.

En este tipo de ejercicios hay que tener en cuenta el siguiente resultado.

> *Una función polinómica solamente puede cambiar de signo en los puntos donde se anula, y por tanto entre cada par de raíces* ***consecutivas*** *dicha función es siempre positiva o siempre negativa.*

Naturalmente, para poder usar este resultado debemos empezar por calcular las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$. Esto solamente puede hacerse en casos sencillos como, por ejemplo, calcular las *raíces enteras* de un polinomio con coeficientes enteros y coeficiente del término de mayor grado igual a 1, pues sabemos que dichas raíces deben ser divisores del término independiente.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica que $-6 - 19x + 28x^2 + 2x^3 - 6x^4 + x^5 > 0$.

Solución. Por lo antes dicho, las raíces *enteras* del polinomio

$$p(x) = -6 - 19x + 28x^2 + 2x^3 - 6x^4 + x^5$$

solamente pueden ser $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$. Tenemos que:

$$p(-6) < 0,\ \ p(-3) = -480,\ \ p(-2) = 0, p(-1) = 32,\ \ p(1) = 0,\ \ p(2) = 20,\ \ p(3) = 0,\ \ p(6) > 0.$$

Por tanto, -2, 1 y 3 son las únicas raíces *enteras* de $p(x)$. Dividiendo por Rufini obtenemos que $p(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)(x^2 - 4x - 1)$. Calculamos ahora las raíces del trinomio de segundo grado $x^2 - 4x - 1$, que resultan ser $\alpha = 2 - \sqrt{5}$ y $\beta = 2 + \sqrt{5}$.

Ordenamos ahora todas las raíces de menor a mayor. Teniendo en cuenta que $2 < \sqrt{5} < 3$, resulta que $-1 < \alpha < 0$, $4 < \beta$. Por el resultado enunciado arriba, deducimos que en los intervalos

$$]-\infty, -2[,\ ]-2, \alpha[,\ ]\alpha, 1[,\ ]1, 3[,\ ]3, \beta[,\ ]\beta, +\infty[$$

el polinomio $p(x)$ es siempre positivo o siempre negativo. Ahora solamente queda evaluar dicho polinomio en un punto cualquiera de cada uno de esos intervalos. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
p(-3) < 0 &\quad\Longrightarrow\quad p(x) < 0 \text{ para todo } x \in]-\infty, -2[\\
p(-1) > 0 &\quad\Longrightarrow\quad p(x) > 0 \text{ para todo } x \in]-2, \alpha[\\
p(0) < 0 &\quad\Longrightarrow\quad p(x) < 0 \text{ para todo } x \in]\alpha, 1[\\
p(2) > 0 &\quad\Longrightarrow\quad p(x) > 0 \text{ para todo } x \in]1, 3[\\
p(4) < 0 &\quad\Longrightarrow\quad p(x) < 0 \text{ para todo } x \in]3, \beta[\\
p(5) > 0 &\quad\Longrightarrow\quad p(x) > 0 \text{ para todo } x \in]\beta, +\infty[
\end{aligned}$$

☺

Si nos piden estudiar para qué valores de la variable x se verifica una desigualdad del tipo $p(x) < q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, basta observar que la desigualdades $p(x) < q(x)$ y $q(x) - p(x) > 0$ son equivalentes y que $q(x) - p(x)$ es una función polinómica por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Observación importante. Podemos usar el hecho de que las desigualdades $ab \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ son equivalentes cuando $a \geqslant 0$ para simplificar el estudio del signo de una función polinómica.

Por ejemplo, sea la función polinómica $p(x) = (x + 2)^3(x + 1)^2 x(x - 1)^5(x - 4)^6(x^2 + x + 1)$. Como $(x + 1)^2 \geqslant 0$, $(x - 4)^6 \geqslant 0$ y $x^2 + x + 1$ es un trinomio con raíces imaginarias y cuyo coeficiente del término x^2 es positivo, por lo que se verifica que $x^2 + x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (de hecho $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4 > 0$), deducimos que la desigualdad $p(x) \geqslant 0$ es equivalente a $(x+2)^3 x(x-1)^5 \geqslant 0$.

Fíjate que lo que hemos hecho ha sido *prescindir de las raíces de orden par* (la raíz -1 de orden 2 y la raíz 4 de orden 6). También podemos prescindir de los trinomios con raíces complejas porque son siempre positivos o siempre negativos.

Podemos simplificar más teniendo en cuenta que si k es un número impar entonces a^k y a son los dos positivos o los dos negativos. Por tanto la desigualdad $(x+2)^3 x(x-1)^5 \geqslant 0$ es equivalente a $(x+2)x(x-1) \geqslant 0$. Esta última ya es muy fácil de estudiar y deducimos que $p(x) \leqslant 0$ para $x < -2$, $p(x) \geqslant 0$ para $-2 < x < 0$, $p(x) \leqslant 0$ para $0 < x < 1$ y $p(x) \geqslant 0$ para $x > 1$. Teniendo ahora en cuenta que $p(x)$ solamente se anula en los puntos $-2, -1, 0, 1, 4$, podemos precisar el resultado obtenido como sigue:

$$\begin{aligned}
&p(x) < 0 \ \text{ para todo } \ x \in]-\infty, -2[\\
&p(x) > 0 \ \text{ para todo } \ x \in]-2, -1[\cup]-1, 0[\\
&p(x) < 0 \ \text{ para todo } \ x \in]0, 1[\\
&p(x) > 0 \ \text{ para todo } \ x \in]1, 4[\cup]4, +\infty[
\end{aligned}$$

Es fácil deducir de lo anterior el siguiente resultado.

> *Una función polinómica cambia de signo en las raíces reales de orden impar y no cambia de signo en las raíces de orden par.*

Desigualdades entre funciones racionales. Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$. Se supone que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes.

En estos ejercicios basta observar que la desigualdad $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$ es equivalente a la desigualdad $p(x)q(x) > 0$, la cual ya sabemos resolver porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

Ejemplo. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{x^3 + 1} > 0.$$

Solución. Sabemos que al multiplicar una desigualdad por un número positivo se obtiene otra desigualdad equivalente a la dada. Por tanto, si a y b son números reales con $b \neq 0$, tenemos que:

$$\frac{a}{b} > 0 \Longleftrightarrow \frac{a}{b} b^2 = ab > 0.$$

En consecuencia, la desigualdad del enunciado es equivalente a:

$$h(x) = (x^2 - 4x - 2)(x^3 + 1) > 0.$$

Como h es una función polinómica, sabemos que sus raíces reales determinan intervalos en donde la función es siempre positiva o siempre negativa. Evidentemente, las raíces de h son las soluciones de alguna de las ecuaciones

$$x^2 - 4x - 2 = 0, \qquad x^3 + 1 = 0.$$

Las soluciones de la primera ecuación son:

$$\alpha = \frac{4 - \sqrt{24}}{2} = 2 - \sqrt{6}, \qquad \beta = \frac{4 + \sqrt{24}}{2} = 2 + \sqrt{6}.$$

La segunda ecuación tiene una solución evidente, $x = -1$. Dividiendo por Rufini resulta:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

El trinomio x^2-x+1 tiene discriminante negativo, por lo que no tiene raíces reales, es decir, su gráfica no corta al eje de abscisas, y es siempre positivo, $x^2-x+1>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Tenemos que:

$$h(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)(x^2-x+1)>0 \Longleftrightarrow p(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)>0.$$

Como $-1<\alpha<\beta$, deducimos que:

$$\begin{aligned}
x<-1 &\implies p(x)<0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1<x<\alpha &\implies p(x)>0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
\alpha<x<\beta &\implies p(x)<0 \text{ porque es producto de dos números negativos y uno positivo.}\\
\beta<x &\implies p(x)>0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Concluimos que la desigualdad del enunciado es cierta para valores de x en $]-1,\alpha[\cup]\beta,+\infty[$. ☺

Comentario. No es buena estrategia en este tipo de ejercicios estudiar por separado los intervalos en donde el numerador o el denominador son siempre positivos o siempre negativos. Esa forma de proceder complica innecesariamente las cosas.

El signo de $p(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)$ en cada intervalo puede estudiarse de muchas formas. Podemos evaluar $p(x)$ en un punto de cada intervalo (es la forma más larga y que requiere más cálculos). También podemos observar que $p(x)$ es un polinomio con coeficiente líder positivo, por lo que para valores de x positivos y muy grandes será $p(x)>0$, lo que nos dice que para $x>\beta$ es $p(x)>0$. Ahora, como las raíces de $p(x)$ son simples, se produce un cambio de signo en cada una de ellas y volvemos a obtener el mismo resultado anterior.

Hay que simplificar siempre que sea posible. Por ejemplo, si no simplificas la expresión $\alpha=\dfrac{4-\sqrt{24}}{2}$ no podrás comparar fácilmente α con -1, y necesitas poderlo hacer para ordenar las raíces.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

- Igualdades del tipo $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$. Como consecuencia de la desigualdad triangular, la igualdad $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $f(x)g(x)\geqslant 0$.
- Una igualdad del tipo $|f(x)|=|g(x)|$ es equivalente a la igualdad $(f(x))^2=(g(x))^2$; y también es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x)=g(x)$ o $f(x)=-g(x)$.
- Una igualdad del tipo $|f(x)|=g(x)$ es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x)=g(x)$ o $f(x)=-g(x)$, y además que se verifique $g(x)\geqslant 0$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)|\leqslant|g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $(f(x))^2\leqslant(g(x))^2$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)|\leqslant|g(x)|$ también puede estudiarse calculando los valores de x para los que se da la igualdad $|f(x)|=|g(x)|$, es decir, los puntos en que se anula la función $h(x)=|f(x)|-|g(x)|$. Estos puntos determinan intervalos en los que la función $h(x)$ tiene signo constante[1].
- Una desigualdad del tipo $|f(x)|\leqslant g(x)$ es equivalente a que se verifiquen las dos desigualdades $-g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, y además que se verifique $g(x)\geqslant 0$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)|\geqslant g(x)$ se verifica para los valores de x tales que $g(x)<0$; y para aquellos valores de x para los que $g(x)\geqslant 0$ es equivalente a que se verifique alguna de las dos desigualdades $f(x)\leqslant -g(x)$, $f(x)\geqslant g(x)$.

[1] Suponemos que las funciones f y g son continuas, en cuyo caso, esto es consecuencia del teorema de Bolzano que estudiaremos pronto.

Observación importante. Las reglas anteriores se aplican exactamente igual para igualdades o desigualdades en las que intervienen más de una variable.

Por ejemplo, una igualdad del tipo $|f(x,y)+h(z)| = |f(x,y)| + |h(z)|$ es equivalente a la desigualdad $f(x,y)h(z)\geqslant 0$. Es posible que esta última desigualdad no pueda simplificarse, en cuyo caso debemos dejarla indicada tal como está.

En general, para resolver igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos se deben considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad $\left|x^2-6x+8\right| = x-2$.

Solución. La primera condición que debe cumplirse es que $x-2\geqslant 0$, esto es, $x\geqslant 2$. Para $x<2$ la igualdad del enunciado no puede darse nunca. Supuesto que $x\geqslant 2$, la igualdad del enunciado equivale a que se verifique alguna de las igualdades:

$$\text{a) } x^2-6x+8 = x-2, \qquad \text{b) } x^2-6x+8 = -x+2$$

La igualdad a) es $x^2-7x+10=0$, cuyas soluciones son 2 y 5. La igualdad b) es $x^2-5x+6=0$, cuyas soluciones son 2 y 3. Observa que todas las soluciones obtenidas son mayores o iguales que 2. Concluimos que la igualdad del enunciado es cierta para $x=2$, $x=3$ y $x=5$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\left|\dfrac{x-2}{x^2-2x-1}\right| > \dfrac{1}{2}$.

Solución. La desigualdad del enunciado equivale a que se verifique alguna de las desigualdades:

$$\text{a) } \frac{x-2}{x^2-2x-1} > \frac{1}{2}, \qquad \text{b) } \frac{x-2}{x^2-2x-1} < -\frac{1}{2}$$

La desigualdad a) es equivalente a:

$$\frac{x-2}{x^2-2x-1} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2+4x-3}{2(x^2-2x-1)} > 0 \Longleftrightarrow (-x^2+4x-3)(x^2-2x-1) > 0$$

Calculando las raíces de los dos trinomios obtenemos que son, ordenadas de menor a mayor, $\left\{1-\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}, 3\right\}$. Son todas ellas *raíces impares* de orden 1 (raíces *simples*), por lo que el polinomio $p(x)=(-x^2+4x-3)(x^2-2x-1)$ *cambia de signo en todas ellas*. Fácilmente se ve que para $x<1-\sqrt{2}$ se tiene que $p(x)<0$. Deducimos que:

$$\begin{aligned}
p(x) &< 0 \ \text{ para todo } \ x\in]-\infty, 1-\sqrt{2}[\\
p(x) &> 0 \ \text{ para todo } \ x\in]1-\sqrt{2}, 1[\\
p(x) &< 0 \ \text{ para todo } \ x\in]1, 1+\sqrt{2}[\\
p(x) &> 0 \ \text{ para todo } \ x\in]1+\sqrt{2}, 3[\\
p(x) &< 0 \ \text{ para todo } \ x\in]3, +\infty[
\end{aligned}$$

Concluimos que la desigualdad a) se verifica para $x\in]1-\sqrt{2}, 1[\cup]1+\sqrt{2}, 3[$.

Análogamente se obtiene que la desigualdad b) se verifica para $x\in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[$.

Finalmente, la desigualdad del enunciado se verifica para

$$x\in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]1-\sqrt{2}, 1[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}, 3[.$$

☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad

$$|x^2+3x-9| = |x^2+x-6| + |2x-3|\,.$$

Solución. Poniendo $f(x) = x^2 + x - 6$ y $g(x) = 2x - 3$, la igualdad del enunciado se escribe como $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$, igualdad que equivale a $f(x)g(x) \geqslant 0$, es decir $(x^2+x-6)(2x-3) \geqslant 0$. Calculando las raíces del trinomio tenemos que

$$(x^2 + x - 6)(2x - 3) = 2(x + 3)(x - 2)(x - 3/2).$$

Por tanto, $f(x)g(x)$ es un polinomio cuyas raíces, $\{-3, 3/2, 2\}$, son simples y, por tanto, cambia de signo en todas ellas. Deducimos fácilmente que la desigualdad $f(x)g(x) \geqslant 0$ se verifica si $-3 \leqslant x \leqslant 3/2$, o si $x \geqslant 2$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|x^2 - 6x + 5| > |x^2 + 2x - 5|$.

Solución. Empezamos calculando los puntos en que se verifica que $|x^2 - 6x + 5| = |x^2 + 2x - 5|$. Puesto que dos números tienen igual valor absoluto si son iguales o son opuestos, esta igualdad equivale a que se verifique alguna de las dos igualdades $x^2 - 6x + 5 = x^2 + 2x - 5$, $x^2 - 6x + 5 = -(x^2 + 2x - 5)$. La primera solamente se verifica para $x = 5/4$ y la segunda para $x = 0$ y $x = 2$. Deducimos que la función $h(x) = |x^2 - 6x + 5| - |x^2 + 2x - 5|$ tiene signo constante en los intervalos $]-\infty, 0[$, $]0, 5/4[$, $]5/4, 2[$ y $]2, +\infty[$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} h(-1) = 6 &\implies h(x) > 0 \text{ para todo } x \in]-\infty, 0[\\ h(1) = -2 &\implies h(x) < 0 \text{ para todo } x \in]0, 5/4[\\ h(3/2) = 3/2 &\implies h(x) > 0 \text{ para todo } x \in]5/4, 2[\\ h(3) = -6 &\implies h(x) < 0 \text{ para todo } x \in]2, +\infty[\end{aligned}$$

Por tanto, la desigualdad del enunciado se verifica para $x < 0$ o para $5/4 < x < 2$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|-x + |x - 1|| < 2$.

Solución. La desigualdad del enunciado es equivalente a las dos desigualdades $-2 < -x + |x - 1| < 2$, que son equivalentes a $x - 2 < |x - 1| < x + 2$. La segunda de estas desigualdades solamente puede darse si $x > -2$. Supongamos que $-2 < x \leqslant 1$. Entonces se tiene que $|x - 1| = 1 - x$, por lo que las desigualdades anteriores son en este caso $x - 2 < 1 - x < x + 2$, que equivalen a $-3 < -2x < 1$, es decir, $-1 < 2x < 3$, o bien $-1/2 < x < 3/2$. No podemos olvidar que hemos usado que $x \leqslant 1$, por lo que la condición obtenida queda $-1/2 < x \leqslant 1$. Para $x > 1$ se tiene que $|x - 1| = x - 1$, por lo que las desigualdades anteriores son en este caso $x - 2 < x - 1 < x + 2$, que se cumplen siempre. Concluimos que la desigualdad del enunciado es cierta para $x > -1/2$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la siguiente desigualdad.

$$|x + 1| + |x^2 - 3x + 2| < 4.$$

Solución. Puesto que $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, tenemos que

$$|x + 1| + |x^2 - 3x + 2| = |x + 1| + |(x - 1)(x - 2)| = |x + 1| + |x - 1||x - 2|.$$

Para controlar los valores absolutos consideraremos por separado los casos $x < -1$, $-1 < x < 1$, $1 < x < 2$ y $x > 2$.

- Para $x < -1$ tenemos $|x + 1| + |x - 1||x - 2| = -x - 1 + (1 - x)(2 - x) = x^2 - 4x + 1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2 - 4x + 1 < 4$, es decir, $x^2 - 4x - 3 < 0$. Es fácil comprobar que para $x < -1$ se verifica que $x^2 - 4x - 3 > 0$. Por tanto, para $x < -1$ la desigualdad del enunciado es siempre falsa.

- Para $-1 < x < 1$ tenemos $|x + 1| + |x - 1||x - 2| = x + 1 + (1 - x)(2 - x) = x^2 - 2x + 3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2 - 2x + 3 < 4$, es decir, $x^2 - 2x - 1 < 0$. Las raíces de este trinomio son $1 - \sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2 - 2x - 1 < 0$ equivale a que $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$. Como $-1 < 1 - \sqrt{2} < 1$, concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $1 - \sqrt{2} < x < 1$.

- Para $1 < x < 2$ tenemos $|x+1| + |x-1||x-2| = x + 1 + (x-1)(2-x) = -x^2 + 4x - 1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $-x^2 + 4x - 1 < 4$, es decir, $x^2 - 4x + 5 > 0$. Este trinomio no tiene raíces reales, por tanto se verifica que $x^2 - 4x + 5 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (observa que $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$). Concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $1 < x < 2$.

- Para $x > 2$ tenemos $|x+1| + |x-1||x-2| = x + 1 + (x-1)(x-2) = x^2 - 2x + 3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2 - 2x + 3 < 4$, es decir, $x^2 - 2x - 1 < 0$. Las raíces de este trinomio son $1 - \sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2 - 2x - 1 < 0$ equivale a que $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$. Como $2 < 1 + \sqrt{2}$, concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $2 < x < 1 + \sqrt{2}$.

Para $x = -1$ la desigualdad no se verifica. Para $x = 1$ y $x = 2$ la desigualdad se verifica. Concluimos que la desigualdad se verifica para $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$. ☺